

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БІЗНЕСОВИХ ПРОЦЕСІВ

УДК 330.45

JEL classification: C50, G11

DOI: <https://doi.org/10.20535/2307-5651.21.2022.254720>**Іваненко Т. В.**кандидат технічних наук, доцент
ORCID ID: 0000-0001-7580-8483**Фартушний І. Д.**кандидат фізико-математичних наук, доцент
ORCID ID: 0000-0003-1595-9495Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**Ivanenko Tetiana, Fartushny Ivan**National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

ОПТИМІЗАЦІЯ ІНВЕСТИЦІЙНОГО ПОРТФЕЛЯ КОНСЕРВАТИВНИМИ ІНВЕСТОРАМИ

OPTIMIZATION OF THE INVESTMENT PORTFOLIO BY CONSERVATIVE INVESTORS

У статті розглянуто методику формування оптимального інвестиційного портфеля інвесторами, не схильними до ризику. Метою роботи є спроба віднайти такий розподіл інвестицій, за якого можна було б отримати очікуваний максимальний прибуток. Для цього потрібно, щоб очікувана дохідність інвестиційного портфеля була хоча б усередненою максимальною величиною, а ризиковість урахована тільки введенням обмежень на частку коштів, що вкладаються у цінні папери. Фінансовими інструментами вибрано облигації трьох основних типів: державні облигації внутрішньої позички, муніципальні та корпоративні. Досліджено стан та динаміку фондового ринку України за останні три роки. Зібрано та опрацьовано дані ПФТС щодо котирувань облигацій різних емітентів. Проаналізовано співвідношення «ризик/дохідність» кожного типу цінних паперів. Розраховано кінцеву дохідність тих облигацій, які активно торгуються на ПФТС, з'ясовано наявність циклічних коливань курсу та проведено вирівнювання часового ряду методом ковзної середньої. Для тих облигацій, ліквідність яких є низькою, розраховано кінцеву дохідність як процентну ставку, за якої приведена вартість грошового потоку, згенерованого облигацією, дорівнюватиме ціні її купівлі з урахуванням оподаткування. Складено математичну модель оптимізації інвестиційного портфеля, яка є нелінійною задачею математичного програмування. Цільовою функцією задачі вибрано дохідність портфеля з урахуванням коваріації курсів облигацій. Обмеження передбачають обернену залежність між ризиком цінного паперу та часткою інвестованих коштів. Після розв'язання задачі отримано оптимальний розподіл загальної суми інвестиції між трьома видами облигацій та значення максимального очікуваного прибутку портфеля. Визначені відсоткові співвідношення між різними типами облигацій дають змогу в подальшому визначати, як раціонально розподілити кошти, щоб отримати ще більший прибуток. Подальший розвиток даної стратегії дасть змогу приймати цілком раціональні рішення для інвесторів. Поспання трьох типів облигацій показує комплексну оцінку інвестиційного портфеля консервативними інвесторами.

Ключові слова: облигації, кінцева дохідність, потік платежів, циклічна компонента, автокореляційна функція, часовий ряд, коваріаційна матриця.

The article considers the method of forming the optimal investment portfolio by investors who are not exposed to risk. The purpose of this work is to try to find a distribution of investment in which you could get the expected maximum return. This requires that the expected return on the investment portfolio be at least the average maximum value, and the risk is taken into account only by imposing restrictions on the share of funds invested in securities. Three main types of bonds were selected as financial instruments: domestic government bonds, municipal bonds and corporate bonds. The state and dynamics of the stock market of Ukraine for the last three years are studied. PFTS data on bond quotes of various issuers were collected and processed. The risk / return ratio of each type of securities is analyzed. The final yield of those bonds that are actively traded on the PFTS was calculated, the presence of cyclical exchange rate fluctuations was clarified, and the time series was adjusted by the moving average method. For those bonds with low liquidity, the final yield is calculated as the interest rate at which the present value of the cash flow generated by the bond will be equal to the purchase price, including tax. A mathematical model of investment portfolio optimization has been developed, which is a nonlinear problem of mathematical programming. The target function of the problem is the yield of the portfolio taking into account the covariance of bond prices. Restrictions imply an inverse relationship between the risk of the security and the share of invested funds. After solving the problem, the optimal distribution of the total amount of investment between the three types of bonds and the value of the maximum expected return on the portfolio. Determined percentages between different types of bonds can further determine how to rationally allocate funds to make even greater profits. Further development of this strategy will allow to make quite rational decisions for investors. The combination of three types of bonds shows a comprehensive assessment of the investment portfolio by conservative investors.

Keywords: bonds, final yield, flow of payments, cyclic component, autocorrelation function, time series, covariance matrix.

Постановка проблеми. Під час формування інвестиційного портфеля як приватні, так й інституціональні інвестори традиційно використовують найбільш розповсюджені в Україні цінні папери: акції, облигації, інвестиційні сертифікати. Співвідношення «ризик/дохідність» у кожного типу цих фінансових інструментів різне: акції, особливо українських підприємств, відрізняються високим ступенем ризику та прибутковості, облигації – низьким ступенем цих взаємопов'язаних показників, а ризикованість інвестиційних сертифікатів залежить від того, у які фінансові інструменти вкладе кошти інвестиційного фонду його компанія з управління активами. Під час формування інвестиційного портфеля з метою диверсифікації ризику зазвичай вибирають певну комбінацію інвестиційних інструментів, відмінність полягає у їхній пропорції. В акції переважно інвестують прихильники агресивної інвестиційної стратегії, а консервативні інвестори, не схильні до ризику, надають перевагу інвестуванню в облигації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемі вивчення моделювання портфеля цінних паперів присвячено значну кількість публікацій як зарубіжних науковців, таких як Г. Марковіц, М. Грубер, У. Шарп, Г. Бірман, С. Шмідт, так і вітчизняних (В.Д. Базилевич, О.Д. Вовчак, В.М. Шелудько та ін.). Кожний із науковців по-різному визначав портфель фінансових інвестицій, але у кожного із зазначених авторів метою було зменшення портфельного ризику та збільшення дохідності.

Виклад основного матеріалу. Проаналізуємо ситуацію з обігом облигацій, яка склалася нині на фондовому ринку України. Для цього розглянемо основні види облигацій залежно від емітента та їхні характеристики. Адже, незважаючи на те що у цілому облигації є найбільш надійним інструментом інвестування, вони між собою також розрізняються за певними характеристиками, що впливають на їхню дохідність та ступінь надійності. На первинному та вторинному фондових ринках України обертаються державні, муніципальні та промислові облигації. Держава може емітувати облигації внутрішньої та зовнішньої державної позики (ОВДП та ОЗДП), які є найменш ризикованим інструментом, оскільки купонні виплати та погашення цих облигацій гарантовані державою. Середні відсоткові ставки за ОВДП у 2020 р. становили 15–16%. Ще однією перевагою державних облигацій є неоподатковуваність процентного доходу по них, що збільшує ефективну процентну ставку. Ризик ліквідності цих облигацій також найнижчий з усіх, оскільки вони активно торгуються на ринку. Проте ОЗДП схильні до ризику зміни валютного курсу. Менш надійними порівняно з ОВДП є облигації місцевих позик (ОВМП). Процентні ставки таких облигацій минулого року становили 17–18%. Ринку муніципальних облигацій є вкрай обмеженим: за останні три роки лише Львів, Харків, Івано-Франківськ та Київ поповнювали місцеві бюджети у такий спосіб. Також цей фінансовий інструмент має низьку ліквідність, оскільки попит на нього незначний. Погашення таких облигацій та виплати за ними емітент гарантує за рахунок коштів місцевого бюджету, яких може виявитися недостатньо, і емітент пропонуватиме інвестору пролонгацію або реструктуризацію забор-

гованості. Також інвестор повинен сплатити податок із доходу: ПДФО – 18% та військовий збір – 1,5%. Корпоративні облигації в Україні представлені облигаціями банків та компаній, наприклад АТ «Таскомбанк», ТОВ «Фінансова компанія «Центр фінансових рішень», ПрАТ «Фармацевтична фірма «Дарниця», АТ «Укрпошта» та багато інших. 2020 р. НКЦПФР зареєструвала 88 випусків корпоративних облигацій. Процентні ставки таких облигацій можуть бути в діапазоні 16–22%. Недоліками корпоративних облигацій також є низька ліквідність, відсутність жодного забезпечення боргу та необхідність сплатити державі майже п'яту частину доходу.

Дохід інвестора від облигації складається з двох частин. Одна з них визначається купонною ставкою, яка є або фіксованою (переважно для ОВДП), або змінною із застатком обумовленою формулою обчислення. Формула включає обликову ставку НБУ, розмір якої регулятор установлює відповідно до поточного економічного стану в країні. У кінцевому підсумку купонна ставка змінюватиметься залежно від випадкових чинників фінансового ринку, що є чинником ризику як для емітента, так і для інвестора. Плаваючу купонну ставку частіше застосовують для довгострокових муніципальних облигацій. Друга частина доходу від облигації зумовлена курсовою різницею, яка змінює кінцеву дохідність облигації за відхилення її ринкової вартості від номіналу. Причому за перевищення ринкової вартості над номіналом кінцева дохідність для інвестора стає нижчою від купонної ставки, і навпаки. У разі відсутності попиту на цінний папір, а отже, й відсутності його ринкової вартості, розраховують інвестиційну вартість облигації як приведену вартість (PV) потоку платежів, згенерованого цією облигацією. PV також може відрізнитися від номіналу облигації за умови, що середня ринкова дохідність за аналогічними фінансовими інструментами відрізнитиметься від купонної ставки. Під час розрахунку кінцевої дохідності також необхідно врахувати наявність чи відсутність оподаткування цього виду доходів.

Методологія. Для проведення дослідження було використано методи фінансової математики, економіки, теорії ймовірностей та математичної статистики, математичного програмування, дослідження операцій.

Постановка завдання. Сформулюємо задачу створення інвестиційного портфеля консервативним інвестором із метою максимізації середнього прибутку від такої інвестиції за умови обмеженого ризику. Інвестор має певну суму коштів, яку хоче вкласти у різні типи облигацій. Питання полягає у тому, як оптимально розподілити зазначені кошти між облигаціями різних емітентів з урахуванням їхньої дохідності та ризикованості. Для прикладу розглянемо облигації кожного типу: ОВДП, муніципальні та корпоративні. Проаналізуємо коливання кінцевої дохідності таких облигацій та визначимо притаманні їм ризики. За даними Першої фондової торговельної системи (ПФТС) [1], яка є найбільшою біржею цінних паперів в Україні, зробимо вибірку біржових курсів вибраних облигацій станом на останній день кожного місяця 2020 р., у який відбулися торги. Така статистична вибірка є часовим рядом. Кожний рівень часового ряду (елемент вибірки) складається з трендової, циклічної та випадкової компонент.

У табл. 1 показано котирування вибраної ОВДП на відповідні дати, розраховано її кінцеву дохідність (дохідність до погашення УТМ) за допомогою фінансової функції Excel ДОХІД.

Вибіркове середнє значення становить 11,84%, а середнє квадратичне відхилення – $\sigma = 1,86\%$. На рис. 1 наведено відповідні графіки та лінію тренду. Як видно з графіку, лінія тренду є майже горизонтальною, тобто висхідний або спадний тренди практично відсутні. Цей висновок також буде підтверджено подальшими розрахунками. Перевіримо наявність циклічних коливань дохідності протягом року.

На рис. 2 представлено автокореляційну функцію, значеннями якої є коефіцієнти автокореляції n -го порядку r_n , розраховані між рівнями ряду y_t та y_{t-n} , де за y_t позначено дохідність до погашення в момент t , а за y_{t-n} – УТМ у момент $t-n$, тобто з лагом n . Ці коефіцієнти характеризують щільність лінійного зв'язку між поточним і попереднім рівнями ряду.

Так, ураховуючи, що найбільший лаг не повинен перевищувати $\frac{1}{4}$ від кількості спостережень [2], достатньо проаналізувати коефіцієнти автокореляції 1-го, 2-го та 3-го порядків: $r_1 = 0,361$, $r_2 = -0,463$ та $r_3 = -0,591$. Якби найбільшим за абсолютною вели-

Таблиця 1

Динаміка котирувань ОВДП та зміна її кінцевої дохідності

	A	B	C	D
1		ОВДП	код ISIN 204150	
2	дата пога	26.02.2025	купонна ставка:	15,84%
3			котирування на 100	дохідність
4	дата	номер	одиниць номіналу	до погашення
5	31.01.2020	1	126,21	9,24%
6	28.02.2020	2	124,23	9,62%
7	31.03.2020	3	104,80	14,43%
8	30.04.2020	4	101,27	15,44%
9	29.05.2020	5	109,45	13,09%
10	30.06.2020	6	118,42	10,70%
11	31.07.2020	7	112,64	12,15%
12	31.08.2020	8	120,50	10,05%
13	30.09.2020	9	115,28	11,33%
14	30.10.2020	10	112,09	12,15%
15	30.11.2020	11	111,98	12,12%
16	30.12.2020	12	113,24	11,71%

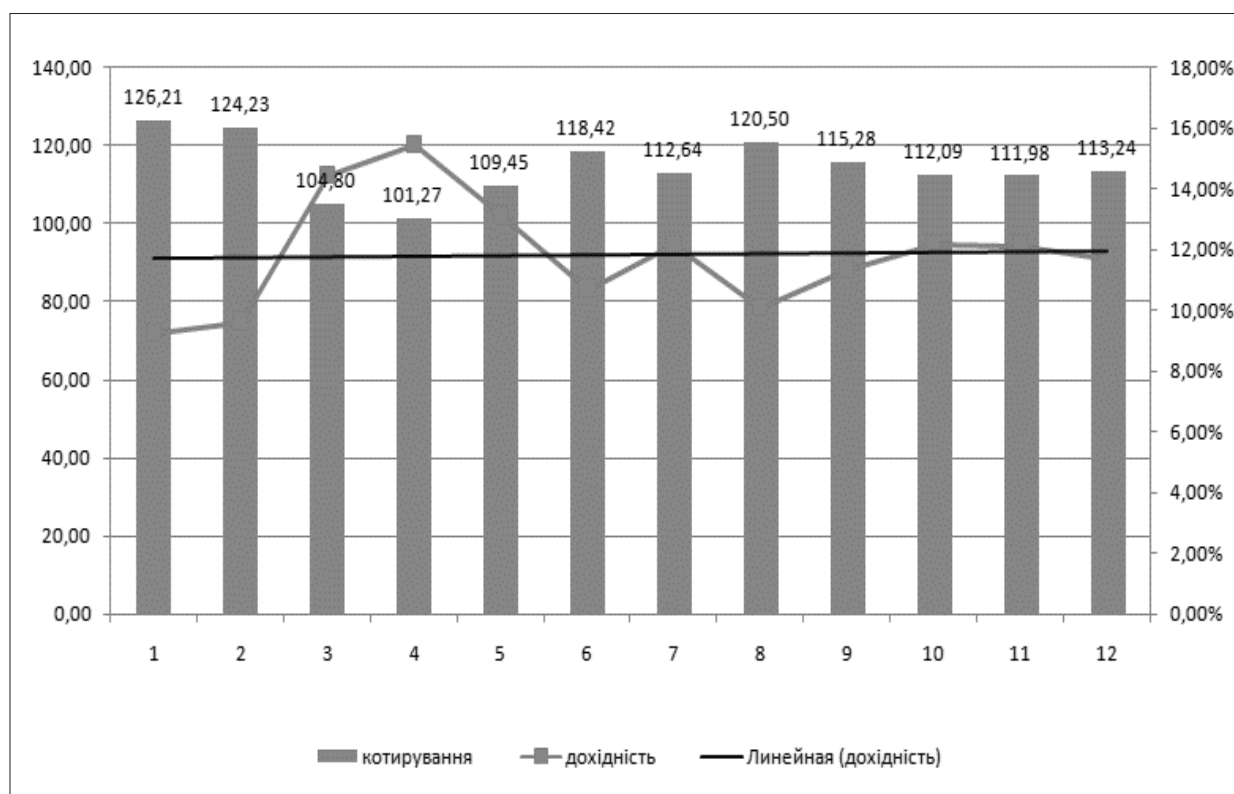


Рис. 1. Зміна дохідності до погашення облігації протягом року

чиною виявився r_1 , слід було б зробити висновок про наявність тренду, але отриманий коефіцієнт r_1 свідчить про відсутність тренду у зміні кінцевої доходності досліджуваної облигації. Найбільшим за модулем є r_3 , і це може означати наявність циклічних коливань із періодичністю у три місяці (квартал). Але цей коефіцієнт кореляції потребує перевірки на значущість. Задамо рівень значущості $\alpha = 0,05$ та перевіримо основну гіпотезу про рівність нулеві коефіцієнта кореляції r_3 генеральної сукупності проти альтернативної гіпотези $r_3 \neq 0$. Критерій Стюдента $T = \frac{r_3 \sqrt{12-2}}{\sqrt{1-(r_3)^2}} \approx -2,317$,

а критичне значення становить $t_{кр}(0,05;10) = 2,23$. Оскільки $|T| \geq t_{кр}$, то основну гіпотезу відхиляємо, тобто $r_3 = -0,591$ є значущим. Отже, циклічна компонента присутня. Графік зміни доходності облигації (рис. 2) свідчить про зменшення амплітуди циклічних коливань протягом року, тому вибираємо мультиплікативну модель часового ряду: $Y = T \cdot S \cdot E$, де Y – доходність облигації, T – трендовий складник, S – циклічна компонента, E – випадковий складник. Для усунення впливу циклічних коливань проведемо вирівнювання часового ряду методом ковзної середньої. Для цього скористаємося пакетом «Аналіз даних» Ексел. Розрахунки наведено в табл. 2.

Отримані оцінки використовуємо для розрахунку значень циклічної компоненти S (табл. 3).

Тепер вирівнюємо початковий часовий ряд для виключення впливу циклічної компоненти. Розрахунок наведено в табл. 4.

На рис. 3 зображено графіки початкового (червона крива) та вирівняного (синя крива) часових рядів та рівняння ліній тренду. Кутові коефіцієнти ліній тренду набувають дуже маленьких значень, отже, ними можна знехтувати і вважати T сталою.

Далі розглянемо муніципальні облигації на прикладі місцевої позики Львівської міської ради (код OLVIVI) з фіксованою купонною ставкою 17,7% річних, щоквартальною виплатою відсоткових платежів та датою погашення наприкінці 2022 р. Угод із перепродажу таких облигацій на ПФТС протягом 2020 р. не відбулося, тому ринкової вартості ці цінні папери не

Таблиця 2

Розрахунок оцінок циклічної компоненти часового ряду

Місяці, t	УТМ, y_t (%)	Ковзна середня за 3 місяці	Центрована ковзна середня	Оцінка циклічної компоненти
1	9,24			
2	9,62	11,10		
3	14,43	13,16	12,13	1,19
4	15,44	14,32	13,74	1,12
5	13,09	13,08	13,70	0,96
6	10,7	11,98	12,53	0,85
7	12,15	10,97	11,48	1,06
8	10,05	11,18	11,08	0,91
9	11,33	11,18	11,18	1,01
10	12,15	11,87	11,53	1,05
11	12,12	11,99	11,93	1,02
12	11,71			

Таблиця 3

Розрахунок циклічної компоненти S

Місяць кварталу				
Квартал року	1	2	3	
1			1,19	
2	1,12	0,96	0,85	
3	1,06	0,91	1,01	
4	1,05	1,02		сума
Середні значення S	1,08	0,96	1,02	3,06
Коригувальний коефіцієнт	0,98			
Скориговані значення S	1,06	0,95	1,00	3,00

мають. Припустимо, що таку облигацію було придбано на початку 2020 р. за 100 грошових одиниць. Розраховуємо ставку, за якої приведена вартість грошового потоку, згенерованого облигацією, дорівнюватиме ціні її купівлі [3], за формулою (1).

$$PV = \frac{INT}{P} \cdot \frac{1 - (1 + r_k)^{-n}}{(1 + r_k)^{\frac{1}{p}} - 1} + \frac{N}{(1 + r_k)^n}, \quad (1)$$

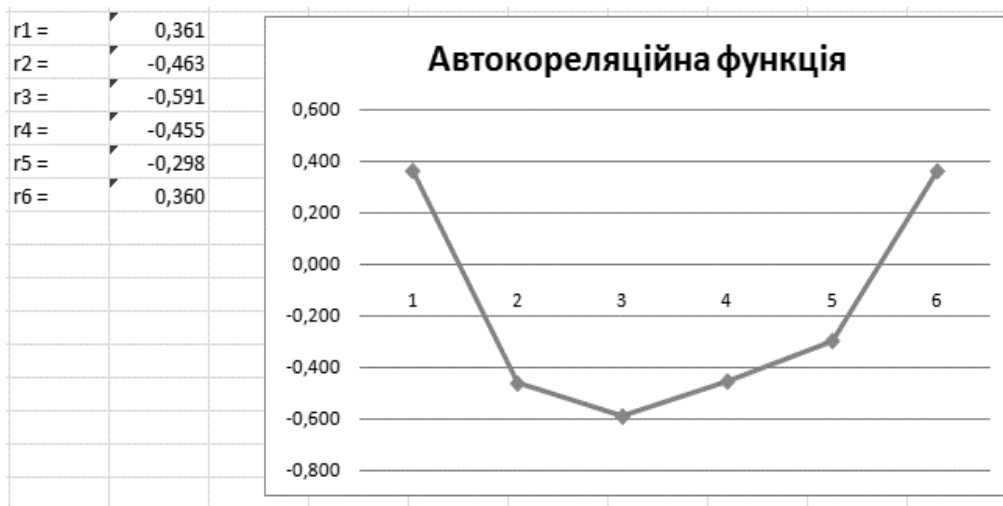


Рис. 2. Коефіцієнти автокореляції 1–6-го порядків

Таблиця 4
Розрахунок вирівняних значень часового ряду

Місяці, t	y_t (%)	S_t	$y_t / S_t = T \cdot E$
1	9,24	1,06	8,72%
2	9,62	0,95	10,13%
3	14,43	1,00	14,43%
4	15,44	1,06	14,57%
5	13,09	0,95	13,78%
6	10,70	1,00	10,70%
7	12,15	1,06	11,46%
8	10,05	0,95	10,58%
9	11,33	1,00	11,33%
10	12,15	1,06	11,46%
11	12,12	0,95	12,76%
12	11,71	1,00	11,71%

вибіркове середнє = **11,80 (%)**

вибіркове скв $\sigma = 1,78 (%)$

де PV – ціна облігації під час купівлі (приведена вартість грошового потоку);

INT – річна купонна виплата за облігацією;

N – номінал облігації;

p – кількість виплат протягом року;

n – кількість років до погашення;

r_k – кінцева дохідність облігації, яку потрібно знайти з рівняння (1).

Підставимо у рівняння (1) дані з Публічної пропозиції облігацій внутрішніх місцевих позик Львівської міської ради серії «І» 2019 р. [4]: $PV = N = 1000$ грн, щоквартальна виплата (тривалість періоду становить 91 день): $\frac{INT}{p} = 17,7 \cdot 1000 \cdot \frac{91}{365} = 44,13$ грн, останню виплату розраховано за 95 днів, тому вона становила 46,07 грн, $p = 4$, $n = 3$. Отримаємо рівняння, яке можна розв'язати лише наближено одним з ітераційних методів. Рівняння (1) розв'язано за допомогою інструменту аналізу даних Excel «Підбір параметра» та отримано $r_k = 18,92\%$ річних. Таким чином, кінцева дохідність виявилася дещо вищою за купонну

ставку, оскільки виплати за облігацією здійснюються не наприкінці року, а щоквартально. Це дає можливість інвестору отримати додатковий дохід шляхом реінвестування коштів. Проте з урахуванням оподаткування $r_k = 18,92 \cdot (1 - 0,195) = 15,23\%$ кінцева дохідність знизиться на 3,69 процентних пункти.

Дохідність корпоративних облігацій розрахуємо на прикладі ТОВ ULF Finance (код OULFA), курс яких протягом 2020 р. тримався на рівні 998,86. Купонна ставка становить 19% річних, виплати доходу щокварталу, погашення має відбутися наприкінці 2023 р. Облігацію придбано на вторинному ринку на початку 2020 р. за поточним курсом. Кінцеву дохідність облігації розраховано тим самим способом, що й у попередньому випадку. Вона становила 20,44%, але з урахуванням податків $r_k = 20,44 \cdot (1 - 0,195) = 16,45\%$.

На наступному етапі дослідження знайдемо розв'язок такої оптимізаційної задачі: інвестором вибрано три типи облігацій, кінцева дохідність яких становить 11,8%, 15,23% та 16,45% річних. Для формування оптимального інвестиційного портфеля, окрім дохідності, слід також урахувати ступінь ризику кожного типу облігацій. Залежно від походження розрізнятимемо ризик, пов'язаний із волатильністю біржового курсу, та ризик, пов'язаний із фінансовим станом емітента. Перший характеризує вибіркове середньоквадратичне відхилення (σ) біржового курсу облігацій протягом року, а другий – імовірність дефолту або технічного дефолту емітента. Так, для ОВДП ризик, пов'язаний із волатильністю біржового курсу, становить $\sigma = 1,78\%$. Згідно з правилом «трьох сигм», за найгіршого сценарію дохідність цих облігацій може зменшитися до 6,46%, але ця інвестиція не стане збитковою. Ризик, пов'язаний із фінансовим станом емітента, є мінімальним, тому можна вважати його відсутнім. З муніципальними облігаціями не було здійснено жодної угоди на ПФТС протягом 2020 р., а отже, складник ризику, пов'язаного з коливанням курсу, відсутній. Розглянуті ОВМП є незабезпеченими, з низькою ліквідністю, однак Рішенням Правління НБУ від 25.09.2020 ці облігації включено до пулу активів, що забезпечують вико-

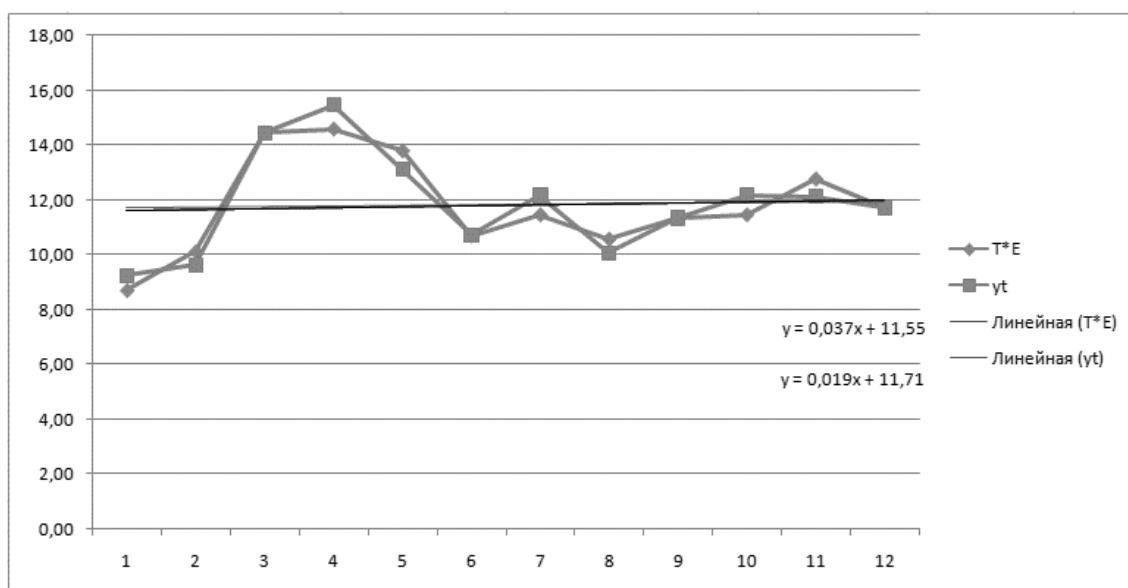


Рис. 3. Порівняння початкового та згладженого часових рядів

Таблиця 5

Співвідношення ризику та доходності облігацій залежно від емітента

Емітент	Доходність, %	Ризик, пов'язаний із волатильністю біржового курсу (σ_j)	Ризик, пов'язаний із фінансовим станом емітента (R_j)
ОВДП	11,80	1,78	1
ОВМП	15,23	0	2
Корпоративні облігації	16,45	0	3

нання банком-андеррайтером (ПАТ «АБ «Укргазбанк») зобов'язань за операціями з рефінансування [5]. Це свідчить про визнання Національним банком достатньої надійності таких облігацій. Оцінюємо ризик емітенту ОВМП вищим від відповідного ризику ОВДП. Довгостроковий кредитний рейтинг корпоративних облігацій TOB ULF Finance незалежна рейтингова агенція «Кредит-Рейтинг» оцінила на рівні uaA+ зі стабільним прогнозом [6]. Проте ці облігації також є незабезпеченими та такими, що не користуються попитом на біржі. Ураховуючи, що дата погашення цих облігацій на один рік пізніше, ніж ОВМП, оцінюємо ризик, пов'язаний із фінансовим станом емітента, вищим від ризику муніципальних облігацій. Кредитний рейтинг – це умовний вираз кредитоспроможності об'єкта рейтингування. Рейтингова оцінка емітента характеризує лише рівень спроможності емітента цінних паперів своєчасно та в повному обсязі виплачувати відсотки й основну суму за борговими зобов'язаннями відносно боргових зобов'язань інших позичальників. Отже, оцінити ризик, пов'язаний із фінансовим станом емітента, можна лише у порівнянні його з іншими емітентами на відміну від ринкового ризику, який можна охарактеризувати середньоквадратичним відхиленням біржового курсу. Тому присвоїмо рейтинг 1 ОВДП (мінімальний ризик емітента), 2 – ОВМП (помірний ризик) та 3 – корпоративним облігаціям (підвищений ризик). Узагальнено отримані результати аналізу ризику та доходності облігацій у табл. 5.

Слід зазначити, що під час формування інвестиційного портфеля з метою мінімізації ризику портфеля у цілому варто вибирати цінні папери з найменшою взаємною кореляцією доходностей. У розглядуваному прикладі облігації відповідають цій вимозі (табл. 6).

Таблиця 6

Коваріаційна матриця доходностей облігацій			
	ОВДП	ОВМП	Корп. обл.
ОВДП	2,905469		
ОВМП	0	3,16E-30	
Корп. обл.	0	6,31E-30	1,262E-29

Проте тут не можна застосувати класичну портфельну теорію Марковіца, у якій мірою ризику виступає показник середньоквадратичного відхилення біржового курсу. Вона не застосовна для неліквідних цінних паперів. До того ж вона не враховує ризик емітента. Виходячи із цього, складемо цільову функ-

цію Z оптимізаційної задачі (2), яка дорівнюватиме середньому очікуваному доходу інвестиційного портфеля, зменшеному на дисперсію доходності портфеля облігацій. Ризик емітента врахуємо шляхом уведення обмежень на частку коштів x_j , вкладених у цінні папери з підвищеним ризиком (x_1, x_2, x_3 – частки коштів, вкладені в ОВДП, ОВМП та облігації підприємств відповідно). σ_{ij}^2 – дисперсії (при $i = j$) або коваріації (при $i \neq j$) i -го та j -го цінних паперів. Обмеження мають бути обернено пропорційні ступеню ризику згідно з табл. 4.

$$Z = \sum_{j=1}^n r_j x_j - \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}^2 x_i x_j \rightarrow \max \quad (2)$$

$$0 \leq x_j \leq \frac{1}{R_j}, \quad \sum_{j=1}^n x_j = 1, \quad j = \overline{1, n}$$

Для розглядуваного прикладу отримаємо задачу (3):

$$Z = 0,118x_1 + 0,1523x_2 + 0,1645x_3 - 2,9x_1^2 \rightarrow \max \quad (3)$$

$$0 \leq x_1 \leq 1, \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x_3 \leq \frac{1}{3}, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Оптимізаційна задача є нелінійною, розв'язана за допомогою надбудови Excel «Пошук розв'язку». Отримано такі результати, які наведено в табл. 7.

Таблиця 7

Результати обчислень

$Z \max = 0,070094$

дохідність	змінні	значення	І/ранг
0,118	x1	0,17	1
0,1523	x2	0,50	1/2
0,1645	x3	0,33	1/3

Висновки. Під час формування інвестиційного портфеля консервативні інвестори вибирають найбільш надійні інструменти, а саме облігації. Однак такі цінні папери також відрізняються ступенем ризику, походження якого може бути різним: ризик зміни біржового курсу та ризик фінансового стану емітента. Для визначення оптимального розподілу загальної суми інвестиції між трьома видами облігацій було складено математичну модель у вигляді нелінійної оптимізаційної задачі. Розв'язок показав, що половину коштів слід інвестувати в муніципальні облігації, третину – у промислові, а 17% коштів – у державні. За цих умов середній очікуваний прибуток від інвестиції буде найбільшим і становитиме 15,065% від інвестованої суми.

Література:

1. Фондова біржа ПФТС : вебсайт. URL: <https://pfts.ua/> (дата звернення: 23.04.2021).
2. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика : підручник. Київ : Знання, КОО, 1998. 494 с.
3. Іваненко Т.В. Основи фінансової математики : підручник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 267 с.
4. Публічна пропозиція облігацій внутрішніх місцевих позик Львівської міської ради серії «І» 2019 року : вебсайт. URL: <https://city-adm.lviv.ua/lmrdownloads/publicnapropozytsiia.pdf> (дата звернення: 08.09.2021).

5. Рішення Правління НБУ «Про включення емітованих міськими радами облігацій внутрішніх місцевих позик до пулу активів (майна), що забезпечують виконання банками зобов'язань за операціями з рефінансування» від 25 вересня 2020 р. № 602 рш. URL: https://bank.gov.ua/ua/legislation/Decision_25092020_602-rsh (дата звернення: 12.09.2021).

6. Кредитний рейтинг УЛФ Фінанс : вебсайт. URL: <https://www.credit-rating.ua/ua/events/press-releases/14858/> (дата звернення: 12.09.2021).

References:

1. PFTS Stock Exchange: website. Available at: <https://pfts.ua/> (access date: 23.04.2021).
2. Lukyanenko I.G., Krasnikova L.I. (1998), *Econometrics: a textbook*. Kyiv: Society "Knowledge", KOO, 494 p.
3. Ivanenko T.V. (2019), *Fundamentals of financial mathematics: a textbook for students. specialty 111 "Mathematics", specialization "Insurance and Financial Mathematics"*. Kyiv: KPI Igor Sikorsky, 267 p.
4. Public offer of bonds of domestic local loans of Lviv City Council series "I" 2019: website. Available at: <https://city-adm.lviv.ua/lmrdownloads/publicnapropozytsiia.pdf> (access date: 08.09.2021).
5. National Bank of Ukraine (2020). Decision of the NBU Board: On the inclusion of bonds issued by city councils of domestic local loans in the pool of assets (property), ensuring the fulfillment of obligations by banks under refinancing operations from September 25, 2020 № 602 rsh: website. Available at: https://bank.gov.ua/en/legislation/Decision_25092020_602-rsh (access date: 12.09.2021)
6. Credit rating ULF Finance: website. Available at: <https://www.credit-rating.ua/ua/events/press-releases/14858/> (access date: 12.09.2021)